Corso di Architettura degli Elaboratori e Laboratorio (M-Z)

Sistemi di numerazione e rappresentazione binaria dei numeri interi

Nino Cauli

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica

Il sistema decimale

- 10 **SIMBOLI**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Ogni simbolo rappresenta una quantità ben precisa
- Ma la quantità dipende anche dalla **POSIZIONE** del simbolo

---

278

8 unità

7 decine (gruppi da 10)

2 centinaia (gruppi da 10 × 10)

Notazione posizionale decimale

- La **QUANTITÀ** dipende anche dalla **POSIZIONE** della cifra
- Il sistema decimale è appunto **POSIZIONALE**
- La **NUMERAZIONE ROMANA** non è posizionale, ma **ADDITIVA** perché il valore complessivo del numero è dato dalla somma dei valori dei simboli, indipendentemente dalla loro posizione

---

I = 1, **IV** = 4, **V** = 5, **IX** = 9, **X** = 10, **XL** = 40, **L** = 50, **XC** = 90, **C** = 100

CCLXXVIII =

(2***C** + **L** + 2***X** + **V** + 3***I**) **=** (2*100 + 50 + 2*20 + 5 + 3*1)

= 278

Notazione posizionale decimale

- Il sistema **DECIMALE/ARABO** è estremamente economico e flessibile
- Con un numero **LIMITATO DI SIMBOLI** (solo 10) è possibile rappresentare **QUALUNQUE QUANTITÀ**
- Questo non è vero per i sistemi **ADDITIVI** i quali, al crescere della quantità, hanno sempre bisogno di **NUOVI SIMBOLI**

Perché 10 simboli?

Potremmo usarne di più o di meno?

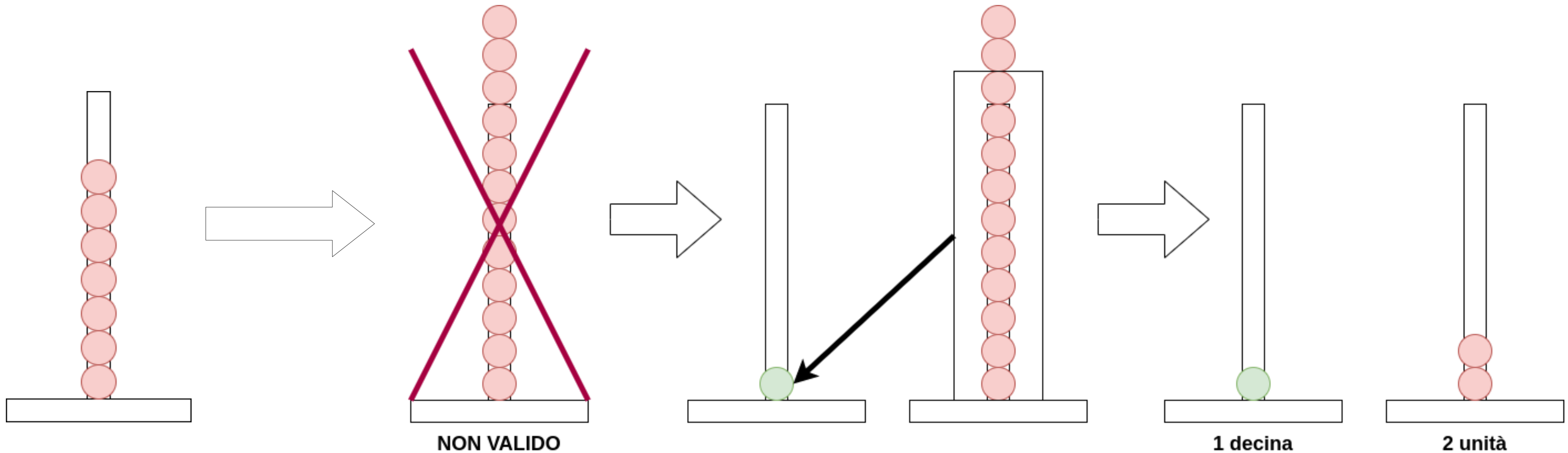
È possibile averne un numero arbitrario (7, 3, 2, 15, 16, etc.)?

Gli abachi

- Da piccoli ci hanno insegnato a rappresentare i numeri con gli abachi
- Un abaco è una serie di asticelle dove è possibile impilare una quantità di palline corrispondenti al numero che vogliamo rappresentare
- **Ma, attenzione!** Ogni asticella di un abaco non può contenere più di 9 palline

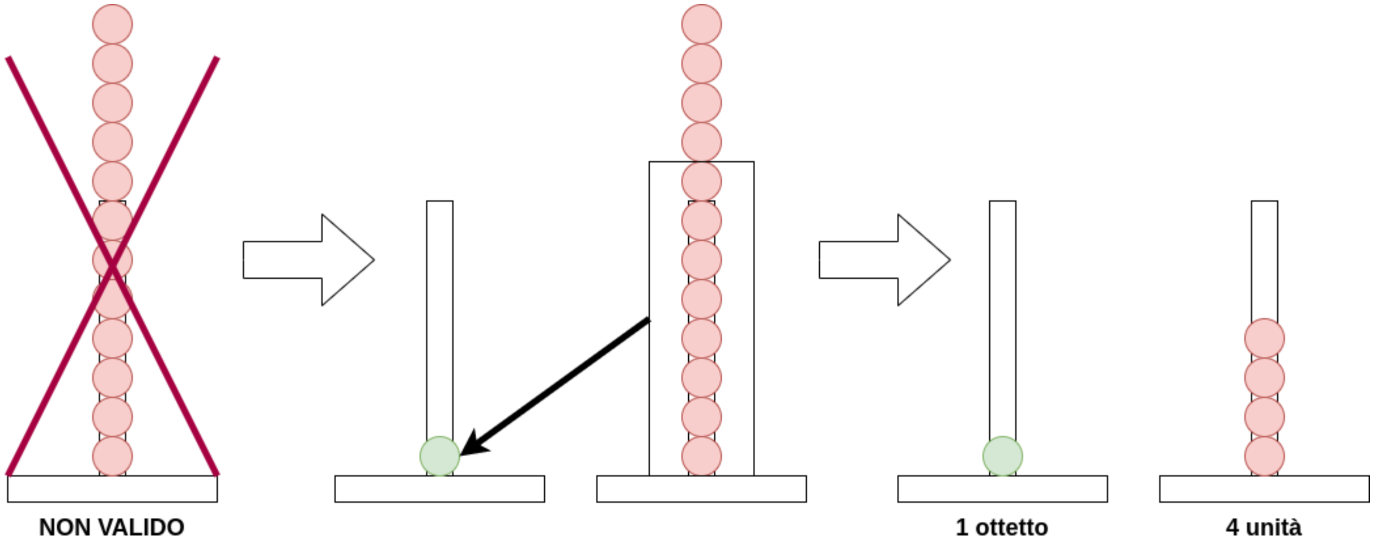
Abaco-10 – Sistema decimale

- Se, ad una asticella con **7 PALLINE**, aggiungiamo altre **5 PALLINE** andiamo oltre la capacità dell'asticella
- Usiamo l'asticella successiva che **"RACCOGLIE"** gruppi di 10 palline
- Non appena la prima asticella supera la sua capacità, raggruppiamo le palline e trasformiamole in una pallina singola posta nell'asticella **SUCCESSIVA**
- Chiamiamo questa configurazione **ABACO-10** = **SISTEMA DECIMALE**



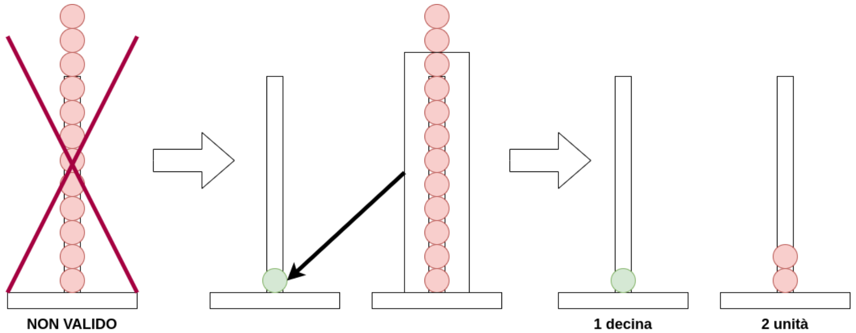
Abaco-8 – Sistema ottale

- Supponiamo di avere lo stesso numero di palline, ma le asticelle non possono contenerne più di **7**
- L'asticella successiva raccoglierà dunque gruppi di 8 palline (**OTTETTI**)
- Nell'asticella delle **UNITÀ** rimarranno **4** palline
- Chiamiamo questo sistema **ABACO-8** = **SISTEMA OTTALE**

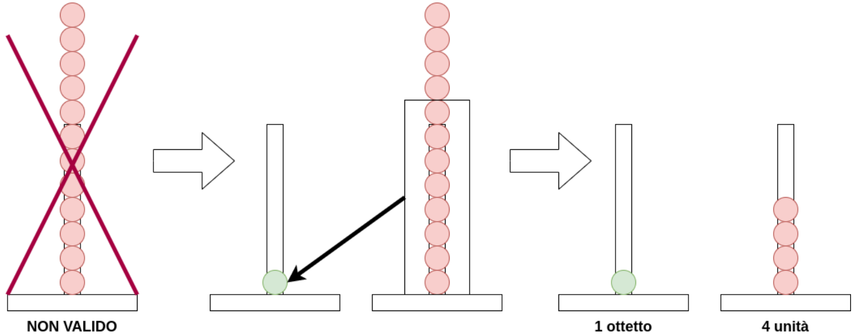


Abaco-8 vs Abaco-10

- La dicitura **14** nell'**ABACO-8** corrisponderà alla dicitura **12** nell'**ABACO-10**
- Entrambe le diciture rappresentano la stessa quantità, ma utilizzano un sistema di "**scrittura**" che ha regole differenti



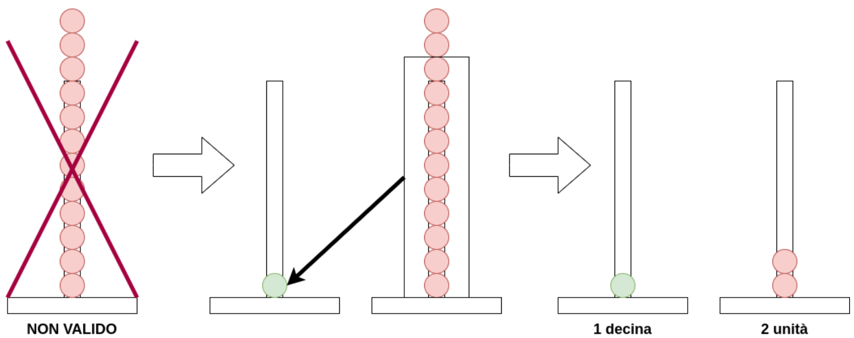
$$= \quad (12)_{10}$$



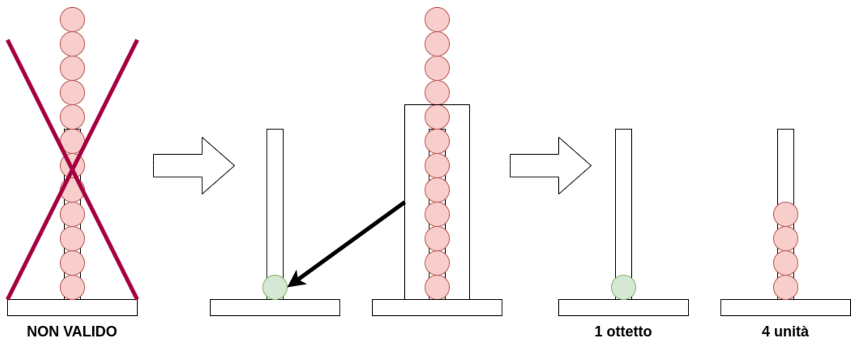
$$= \quad (14)_8$$

Abaco-8 vs Abaco-10

- L'**ABACO-10** ha bisogno di **10 SIMBOLI** -> {0, …, 9}
- L'**ABACO-8** ha bisogno solo di **8 SIMBOLI** -> {0, 1, 2, 4, 5, 6, 7}



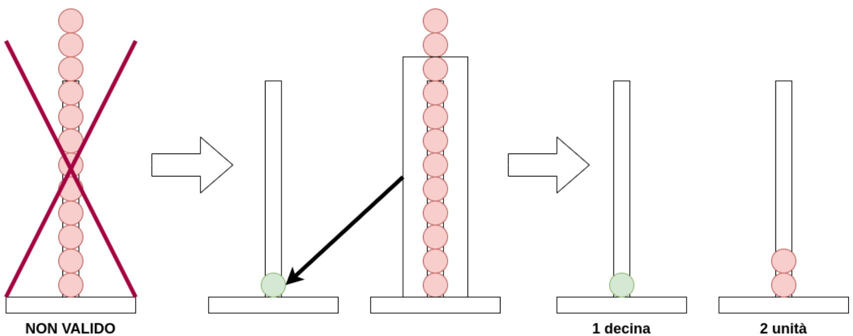
$$= \quad (12)_{10}$$



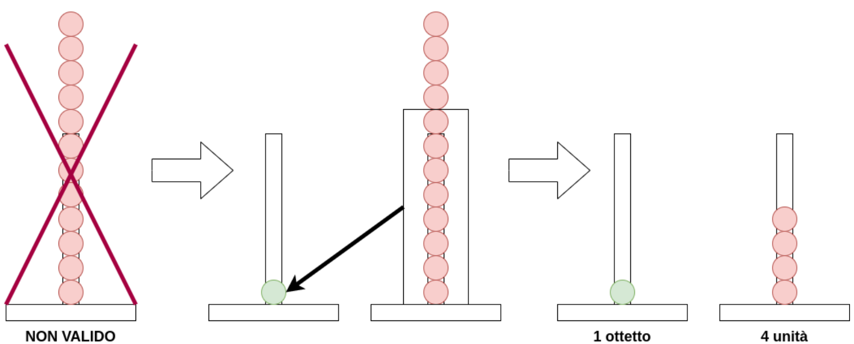
$$= \quad (14)_{8}$$

Abaco-8 vs Abaco-10

- Nell'**ABACO-10** usiamo un **SISTEMA A BASE 10**
- Nell'**ABACO-8** usiamo un **SISTEMA A BASE 8**



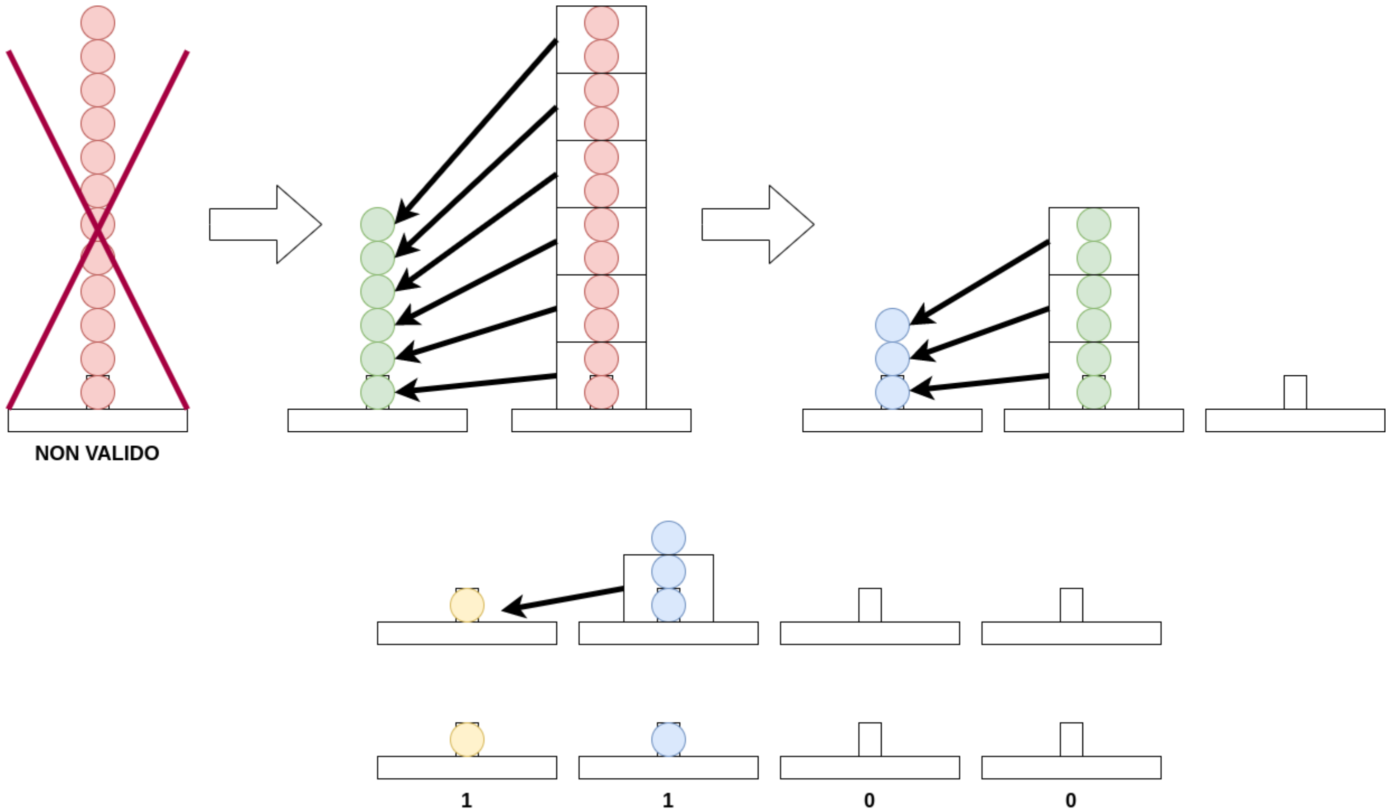
$$= (12)_{10}$$



$$= (14)_{8}$$

Abaco-2 – Sistema binario

- Consideriamo solo **2 SIMBOLI** = {0, 1}
- Ogni asticella potrà contenere **AL PIÙ UNA PALLINA**



Sistemi differenti

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

ABACO-2 (Sistema Binario)

- {0, 1}

$$(12)_{10} = (1100)_2$$

ABACO-8 (Sistema Ottale)

- {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$$(12)_{10} = (14)_8$$

ABACO-10 (Sistema Decimale)

- {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

$$(12)_{10} = (12)_{10}$$

ABACO-16 (Sistema Esadecimale)

- {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

$$(12)_{10} = (C)_{16}$$

Sistemi di numerazione posizionali

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Un sistema di numerazione e definito da:

- Un intero *B* detto **BASE**
- Un insieme di *B* simboli $S_B = \{s_0, \dots, s_{B-1}\}$, ognuno dei quali rappresenta le quantità **0,1,2,...,B−1**

Un numero a n cifre $p_{(n-1)}p_{(n-2)}\dots p_1 p_0$ con $p_{(i)} \in S_B$ e $i=0,\dots,n-1$ può essere rappresentato come **SOMMA DI POTENZE DELLA BASE**:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p_{(i)} \cdot B^i)$$

Esempi

BINARIO

$$(1100)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (12)_{10}$$

OTTALE

$$(126)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = (86)_{10}$$

DECIMALE

$$(126)_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = (126)_{10}$$

ESADECIMALE

$$(126)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = (294)_{10}$$

Conversione da base 10 a base B

La **CONVERSIONE** di un numero da **base 10** a **base B** usa la tecnica delle **DIVISIONI SUCCESSIVE:**

1) Sia **N** il numero (in **base 10**) da convertire

2) Si calcola la divisione intera **N = N/B** e si mette da parte il resto **R** della divisione

3) Se **N > 0** si va al **PASSO 2**

4) Se **N = 0**, si riportano i vari **RESTI** da destra verso sinistra: essi rappresentano il numero convertito in **base B**

Conversione da base 10 a base B

Convertire 13 in base 2

Quoziente	Resto
13	
6	1
3	0
1	1
0	1

$$\Rightarrow (1101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (13)_{10}$$

Convertire 13 in base 5

Quoziente	Resto
13	
2	3
0	2

$$\Rightarrow (23)_5 = 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = (13)_{10}$$

Numero di valori rappresentabili

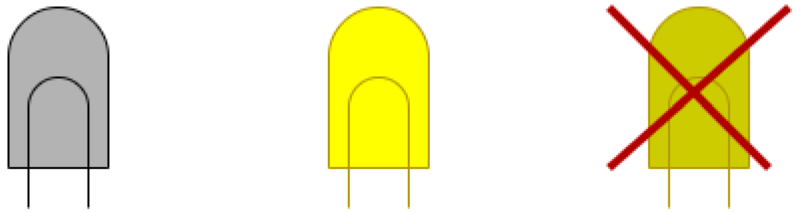
$$\mathbf{P} = p_{(n-1)}p_{(n-2)}\ldots p_1 p_0\,, \qquad p_{(i)} \in S_B \text{ e } i=0,\ldots,n-1$$

Quanti valori possono essere rappresentati dal numero **P** espresso in base *B*?

$n = 1$		$n = 2$		n
$\lvert\mathbf{P}\rvert = \lvert p_0\rvert = B$	$\Rightarrow$	$\lvert\mathbf{P}\rvert = \lvert p_1 p_0\rvert = B{*}B = B^2$	$\Rightarrow$	$\lvert\mathbf{P}\rvert = \lvert p_{(n-1)}p_{(n-2)}\ldots p_1 p_0\rvert = B^n$
$[0, B)$		$[0, B^2)$		$[0, B^n)$

Dall’elettricità all’aritmetica

- Il calcolatore è una macchina composta da **CIRCUITI E COLLEGAMENTI ELETTRICI**
- Immaginiamo di poter connettere delle lampadine o dei **LED** ai vari collegamenti presenti dentro un computer
- Immaginiamo di poter effettuare delle “**ISTANTANEE**” per valutare la luminosità delle lampadine
- Scopriremmo che ogni lampadina è sempre o **TOTALMENTE SPENTA** oppure **TOTALMENTE ACCESA**
- Non troveremo mai una lampadina accesa “con luminosità parziale”



Perché solo due stati elettrici?

- Progettare e realizzare circuiti elettrici di tipo **ON/OFF** e molto più **SEMPLICE** ed **IMMEDIATO** rispetto a dover gestire diversi livelli di tensione

- I concetti **ON/OFF** possono essere rappresentati tramite **NUMERI**:
  - **OFF = 0**
  - **ON = 1**

- Il **SISTEMA DI NUMERAZIONE BINARIA** è la soluzione perfetta per rappresentare valori **ON/OFF**

- Individuata una tipologia di **INFORMAZIONE**, si possono inserire delle **REGOLE** non ambigue per **RAPPRESENTARE** l'informazione come **SEQUENZE BINARIE**

Numeri interi naturali in binario

P = $p_{(n-1)}p_{(n-2)}\ldots p_1p_0$, $p_{(i)} \in \{0,1\}$ e $i=0,\ldots,n-1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{(i)} \cdot 2^i$$

Numero di valori rappresentabili = **$[0, 2^n)$**

Addizione di numeri naturali

Per **SOMMARE** numeri binari ad 1 bit:

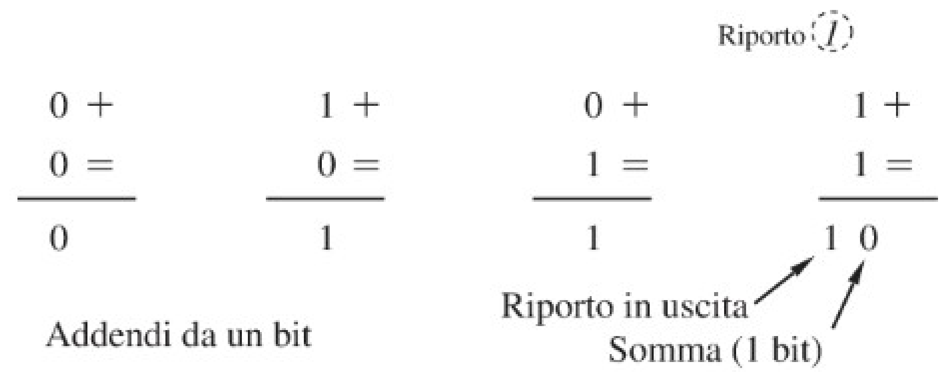


Figura 1.4 - Addizione di numeri a un bit

Il **RIPORTO IN USCITA** della cifre precedente viene assegnato come **RIPORTO IN ENTRATA** alla successiva

Numeri con segno

Come rappresentare i **NUMERI INTERI RELATIVI**?

IDEA

Usare il bit più a sinistra per rappresentare il segno:

- **0 = POSITIVO**
- **1 = NEGATIVO**

Numeri con segno

Come rappresentare il **VALORE ASSOLUTO**?

3 SOLUZIONI

- **SEGNO E VALORE ASSOLUTO**
- **COMPLEMENTO A UNO**
- **COMPLEMENTO A DUE**

Numeri con segno

Stringa binaria			Segno Valore assoluto	Comp. 1	Comp. 2
0	1	1	+3	+3	+3
0	1	0	+2	+2	+2
0	0	1	+1	+1	+1
0	0	0	+0	+0	+0
1	0	0	-0	-3	-4
1	0	1	-1	-2	-3
1	1	0	-2	-1	-2
1	1	1	-3	-0	-1

$(-2^{n-1}, \ldots, 2^{n-1})$ $[-2^{n-1}, \ldots, 2^{n-1})$

Somma modulare

Definiamo la funzione **MODULO** nel modo seguente:

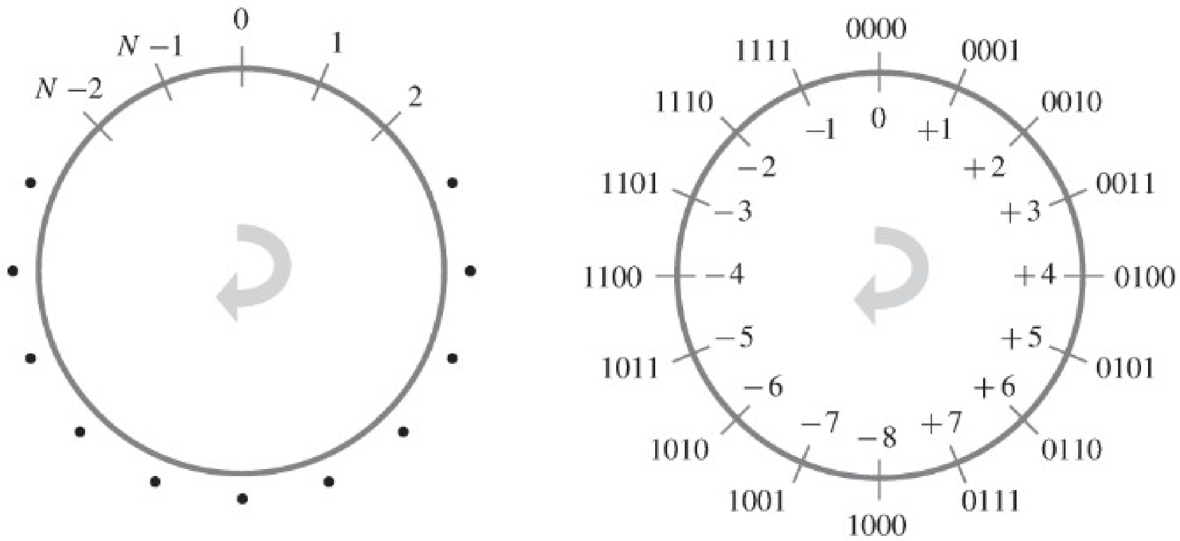
$$\mathbf{A\ mod\ } \boldsymbol{n} \mathbf{\ = resto\ di\ (A\ /\ } \boldsymbol{n}\mathbf{)}$$

La **SOMMA MODULARE**:

$$\mathbf{(A + B)\ mod\ } \boldsymbol{n} \mathbf{\ = resto\ di\ ((A + B)\ /\ } \boldsymbol{n}\mathbf{)}$$

Assumerà sempre valori compresi tra **0 e *n*-1**

Somma complemento a due



(a) Circonferenza rappresentante il sistema numerico modulo N

(b) Corrispondenza tra i sistemi numerici mod 16 e in complemento a due con $n = 4$ bit

Figura 1.5 - Rappresentazione geometrica di un sistema numerico in complemento a due

Come quella binaria naturale, ma **trascurando il riporto in uscita**

Somma complemento a due

ADDIZIONE: come quella binaria naturale, ma trascurando il riporto in uscita

SOTTRAZIONE: addizione con il complemento a due del sottraendo

(a)	0010 +	(+2)		(b)	0100 +	(+4)
	0011 =	(+3)			1010 =	(−6)
	0101	(+5)			1110	(−2)
(c)	1011 +	(−5)		(d)	0111 +	(+7)
	1110 =	(−2)			1101 =	(−3)
	1001	(7)			0100	(+4)
(e)	1101 −	(−3)	⇒		1101 +	
	1001 =	(−7)			0111 =	
					0100	(+4)
(f)	0010 −	(+2)	⇒		0010 +	
	0100 =	(+4)			1100 =	
					1110	(−2)

Figura 1.6 (parte) - Operazioni di addizione e sottrazione in complemento a due

Trabocco (overflow)

Il risultato di addizione e sottrazione in complemento a 2 è corretto se è **COMPRESO** nell'intervallo:

$$[-2^{n-1}, 2^{n-1})$$

In caso contrario avviene un evento di **TRABOCCO**

Il **TRABOCCO** può avvenire solo se:

1) I due addendi sono **CONCORDI IN SEGNO**

2) Il **BIT DI SEGNO** della somma degli addendi è **DIVERSO** da quello degli addendi

Estensione e riduzione del segno

Spesso si presenta la necessità di aumentare o diminuire il numero di bit usati per codificare un numero

Regole molto semplici:

- **ESTENSIONE DEL SEGNO**: si replica a sinistra il bit del segno tante volte quanto occorre
- **RIDUZIONE DEL SEGNO**: si rimuove il bit più a sinistra tante volte quante occorre, purché il bit successivo abbia ugual valore