Esercizio 1:
Dimostrare la validità delle seguenti identità booleane, usando le regole dell'algebra di Boole e/o le tabelle di verità

a) ¬(x ⊕ y) ⊕ z = ¬x ¬y ¬z + x y ¬z + ¬x y z + x ¬y z
b) x + y ¬x = x + y
c) x ¬y + ¬y z +z ¬x = x ¬y + z ¬x

---

a)

$$\begin{aligned}
(\overline{x \oplus y}) \oplus z &= (\overline{x \oplus y})\overline{z} + (x \oplus y)z = \\
&= (\overline{\overline{x}y + x\overline{y}})\overline{z} + (\overline{x}y + x\overline{y})z = \\
&= ((\overline{\overline{x}y})(\overline{x\overline{y}}))\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z = \\
&= ((x + \overline{y})(\overline{x} + y))\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z = \\
&= ((x + \overline{y})\overline{x} + (x + \overline{y})y)\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z = \\
&= (x\overline{x} + \overline{x}\,\overline{y} + xy + y\overline{y})\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z = \\
&= (\overline{x}\,\overline{y} + xy)\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z = \\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z
\end{aligned}$$

b)

$$x + y\overline{x} = (x + y)(x + \overline{x}) = x + y$$

c)

$$\begin{aligned}
x\overline{y} + \overline{y}z + z\overline{x} &= x\overline{y} + \overline{y}z(x + \overline{x}) + z\overline{x} = \\
&= x\overline{y} + x\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}z + z\overline{x} = \\
&= x\overline{y}\,(1 + z) + z\overline{x}(\overline{y} + 1) = \\
&= x\overline{y} + z\overline{x}
\end{aligned}$$

Esercizio 2:
Determinare le forme SOP e POS di costo minimo della funzione a) dell'esercizio 1.

----

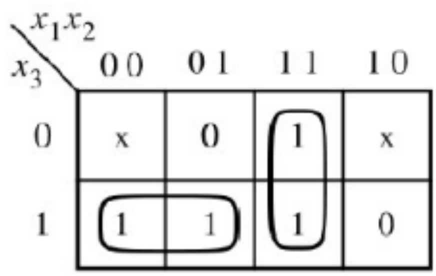
x_3 \ $x_1\ x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

$$SOP = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3$$

$$POS = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + x_2 + x_3)$$

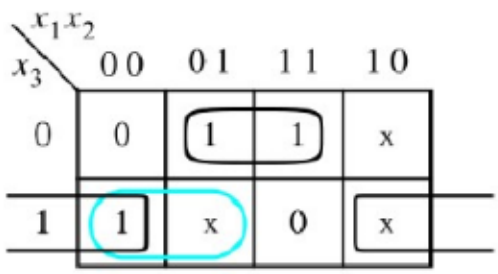
Esercizio 3:
Determinare forme SOP di costo minimo delle 2 funzioni a tre variabili riportate in tabella.
Determinare il valore opportuno delle condizioni di indifferenza.

X1	X2	X3	F1	F2
0	0	0	x	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	x
1	0	0	x	x
1	0	1	0	x
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0



L'espressione di costo minimo per f_3 è:

$$f_3 = x_1\, x_2 + \overline{x}_1\, x_3$$



Un'espressione di costo minimo per f_4 è:

$$f_4 = x_2\, \overline{x}_3 + \overline{x}_2\, x_3$$

Un'altra espressione che ha lo stesso costo è:

$$f_4 = x_2\, \overline{x}_3 + \overline{x}_1\, x_3$$

Esercizio 4:
Trovare una rete combinatoria composta da sole porte NAND della funzione a 4 variabili che vale 1 solo quando il numero binario rappresentato dai suoi ingressi è primo. Seguire i seguenti passi:

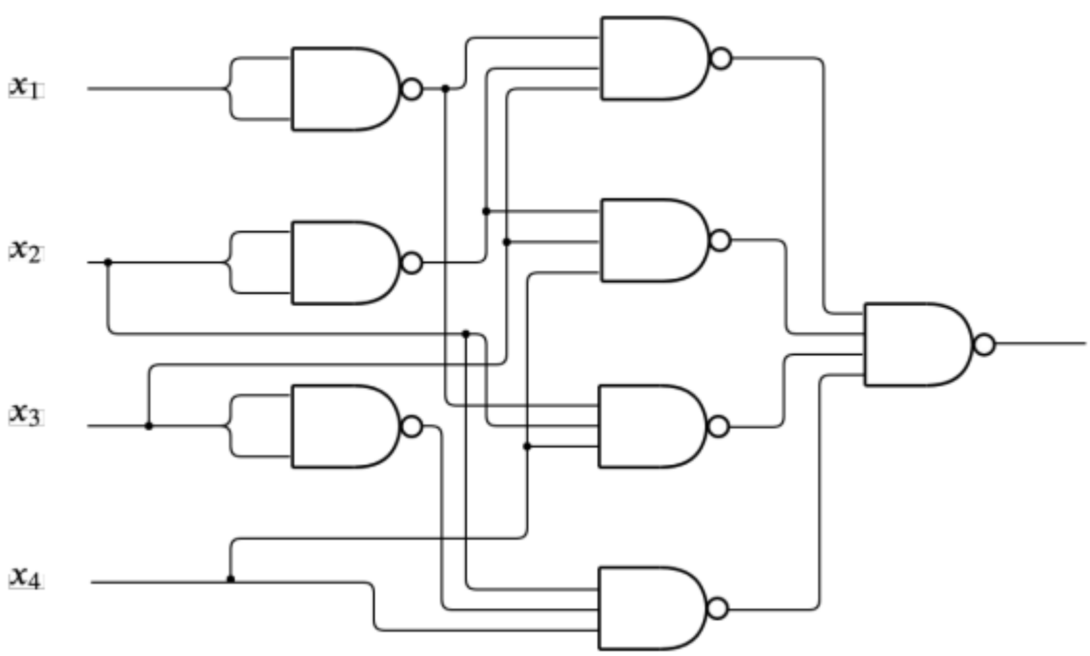
- Prima di tutto trovare la tabella di verità.
- Poi trovare la forma SOP minima
- Per ultimo trovare la rete di NAND a partire dalla forma SOP

---

x_3 x_4 \ x_1 x_2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	0	0
0 1	0	1	1	0
1 1	1	1	0	1
1 0	1	0	0	0

$$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_4 + x_2\overline{x}_3x_4$$

$$(\overline{x}_1 \uparrow \overline{x}_2 \uparrow x_3) \uparrow (\overline{x}_2 \uparrow x_3 \uparrow x_4) \uparrow (\overline{x}_1 \uparrow x_2 \uparrow x_4) \uparrow (x_2 \uparrow \overline{x}_3 \uparrow x_4)$$



Esercizio 5:
Progettare una rete combinatoria usando solo porte NAND a due ingressi che realizzi la seguente funzione booleana:

$(x_1 + x_3)(\neg x_2 + \neg x_4)$

$$
\begin{aligned}
(x_1 + x_3)(\overline{x}_2 + \overline{x}_4) &= (\overline{\overline{x_1 + x_3}}) \cdot (\overline{\overline{\overline{x}_2 + \overline{x}_4}}) = \\
&= \overline{\overline{(\overline{\overline{x_1 + x_3}}) \cdot (\overline{\overline{\overline{x}_2 + \overline{x}_4}})}} = \\
&= \overline{\overline{(\overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}}) \cdot (\overline{x_2 \cdot x_4})}} = \\
&= \overline{(\overline{x_1} \uparrow \overline{x_3}) \uparrow (x_2 \uparrow x_4)}
\end{aligned}
$$